

# PION 2015

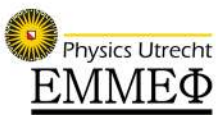
## Uitwerkingen



Mede mogelijk gemaakt door



Leiden Institute of Physics



Physics Utrecht  
EMMEΦ

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



nederlandse



natuurkundige vereniging

stichting physica

Radboud Universiteit



KONINKLIJKE HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ DER WETENSCHAPPEN



TU/e Technische Universiteit  
Eindhoven  
University of Technology



rijksuniversiteit  
 groningen



KONINKLIJKE NEDERLANDSE  
AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN



# Inhoud

1	Tijd is geld .....	2
2	Symmetrie in de Molecuulfysica .....	5
3	Statistical Mechanics: Classical versus Quantum ideal gas .....	9
4	Torsiemagnetometer .....	13
5	Rigid Body Rotations and Chandler Wobble .....	16
6	Emission, energy transfer and time-resolved spectroscopy .....	19
7	Concentrated Solar Power - Carnot cycle power generator .....	21
8	Een afgeremd elektron .....	24
9	Nucleosynthesis in het vroege Heelal .....	26
10	Klein Tunneling in Graphene .....	27

# 1. Tijd is geld

Prof. dr. W. Beenakker  
Radboud Universiteit Nijmegen  
10 punten

- 1.a We beginnen met de bepaling van de Lagrangiaan die hoort bij de beweging van het puntdeeltje langs de draad, aannemende dat het nulpunt van de gravitatie-energie bij  $y = \phi = 0$  ligt. Voordat we de randvoorwaarde opleggen heeft de Lagrangiaan van het 2-dimensionale systeem de gebruikelijke vorm in termen van een kinetische energieterm  $T_{\text{kin}}$  en een gravitationele potentiaalterm  $V_{\text{grav}}$ :

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T_{\text{kin}} - V_{\text{grav}} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy, \quad (1.1)$$

waarbij  $\dot{x} \equiv dx/dt$  en  $\dot{y} \equiv dy/dt$  de  $x$ - en  $y$ -componenten zijn van de snelheid van het puntdeeltje. Vervolgens implementeren we de randvoorwaarde die door de vaste draad wordt opgelegd:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = 2mA^2\dot{\phi}^2 \cos^2(\phi) - mgA \sin^2(\phi). \quad (1.2)$$

Omdat de parameter  $\phi$  hier vrij is te variëren, kunnen we de bijbehorende bewegingsvergelijking rechtstreeks uit deze (effectief) 1-dimensionale Lagrangiaan afleiden zonder een reactiekracht te hoeven invoeren die de randvoorwaarde oplegt.

- 1.b Voor het gemak gaan we over op de gegeneraliseerde coördinaat  $q \equiv 2A \sin(\phi)$  en schrijven de Lagrangiaan om tot de mooie compacte vorm

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{mg}{4A} q^2. \quad (1.3)$$

Hieruit volgt dan de bewegingsvergelijking

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= m\ddot{q} + \frac{mg}{2A} q = 0 \\ \Rightarrow &\boxed{\ddot{q}(t) = -\frac{g}{2A} q(t)}. \end{aligned}$$

We hebben hier dus te maken met een perfecte lineaire harmonische oscillator!

- 1.c Vervolgens laten we het puntdeeltje vanuit stilstand vanaf positie  $\phi = \phi_0 \neq 0$  los, hetgeen aanleiding geeft tot de volgende begincondities:

$$q(0) = 2A \sin(\phi_0) \equiv q_0 \quad \text{en} \quad \dot{q}(0) = 0. \quad (1.4)$$

De bijbehorende oplossing van de bewegingsvergelijking wordt dan simpelweg

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) \quad (1.5)$$

in termen van de  $q$ -onafhankelijke hoekfrequentie  $\omega = \sqrt{g/(2A)}$ . Dit houdt in dat het puntdeeltje er een vaste tijdsduur  $\tau = \pi/(2\omega)$  over doet om de onderkant van de draad te bereiken, *hetgeen onafhankelijk is van de hoogte waarop het wordt losgelaten!*

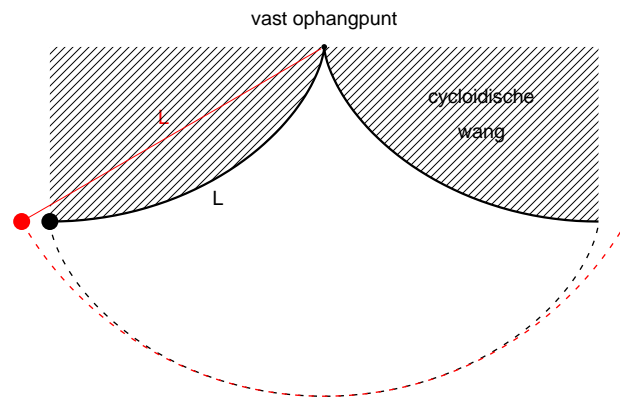
- 1.d In het midden van de 17<sup>e</sup> eeuw ontwikkelde Christiaan Huygens zijn beroemde slingeruurwerk. Bij een gangbare slinger beschrijft de “puntmasa” aan het uiteinde van de slingerdraad een cirkelvormig slingertraject in het  $xy$ -vlak (aangegeven in rood in het onderstaande plaatje). Zo’n systeem wordt beschreven door de welbekende bewegingsvergelijking voor een mathematische slinger met lengte  $L$ :

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)). \quad (1.6)$$

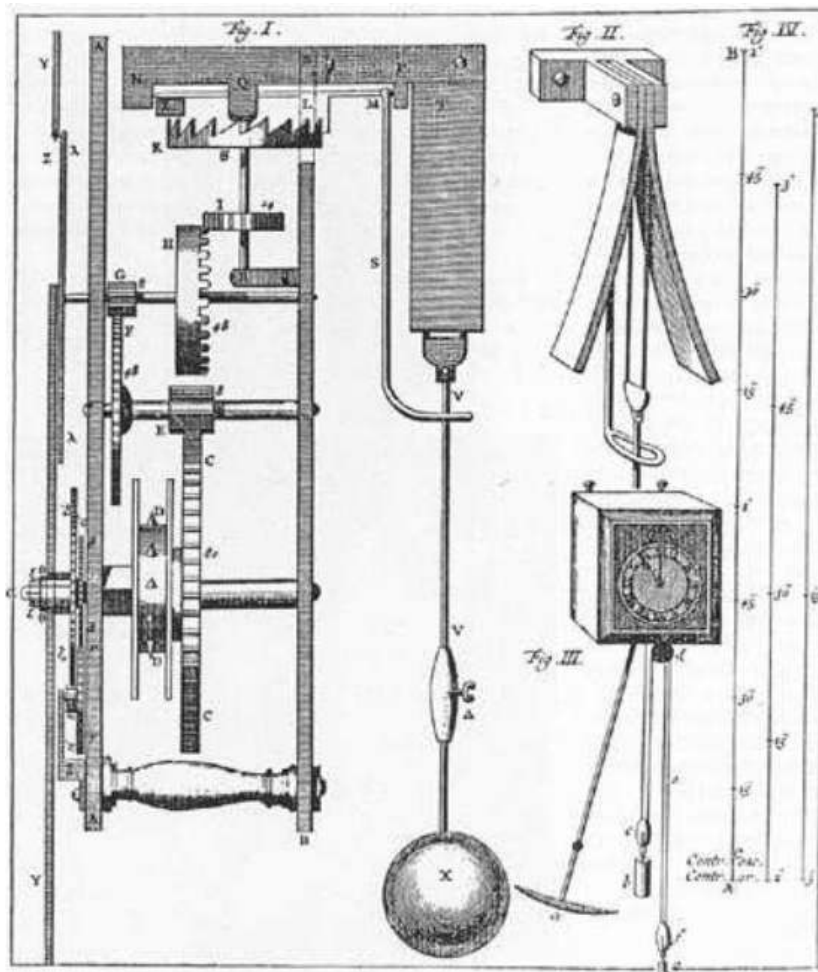
waarbij  $\theta$  de hoek is die de slinger maakt met de verticale stand. Slechts voor kleine waarden van  $\theta$  hebben we te maken met een perfecte lineaire harmonische oscillator. Het gevolg is dat de periode van zo’n slinger niet volledig onafhankelijk is van de amplitude van de slinger, hetgeen een fout induceert in tijdmetingen die met de slinger worden gedaan. Niet ideaal dus voor een precisie-uurwerk!

Het slingermechanisme van Christiaan Huygens (bedacht in 1656 en gepatenteerd in 1657) had echter twee cycloïdische “wangen” (gearceerd in het plaatje) die er voor zorgden dat het feitelijke slingertraject (aangegeven in zwart) precies van bovenstaande cycloïdische vorm was, met  $A$  de helft van de lengte  $L$  van de slingerdraad.

Zoals we in onderdeel (c) hebben gezien ligt de periode van de slingerbeweging nu wel vast en is er dus sprake van een nauwkeurige tijdmaat. Christiaan Huygens wordt dan ook gezien als de uitvinder van het slingeruurwerk en zijn uitvinding heeft pas in de 20<sup>e</sup> eeuw plaats moeten maken voor radicaal nieuwe ideeën.



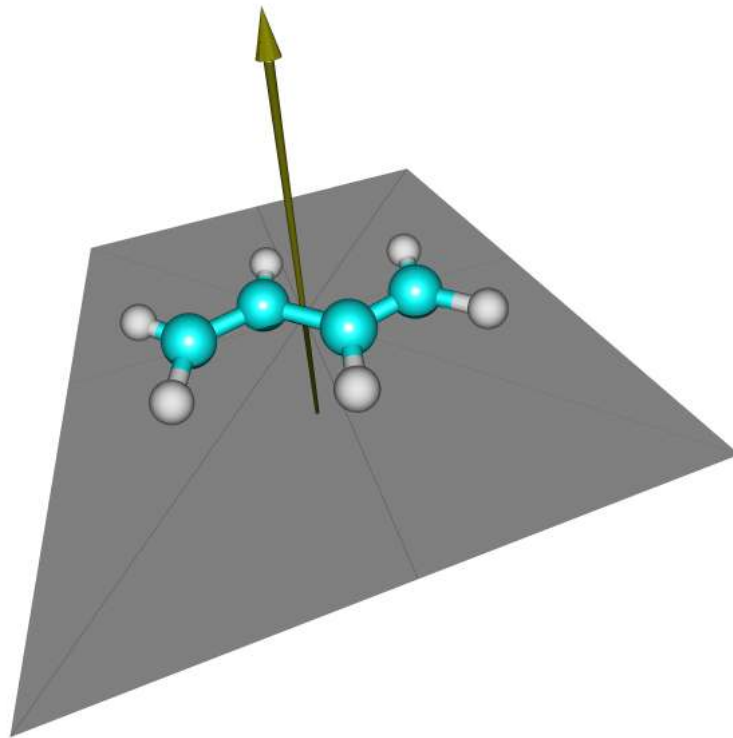
Figuur 1.1



Figuur 1.2 Ontwerp van Huygens uit zijn boek "Horologium Oscillatorium" (1673)

## 2. Symmetrie in de Molecuulfysica

Prof. dr. J. Oomens  
Radboud Universiteit Nijmegen  
10 punten



2.a

**Figuur 2.1**

De figuur toont de  $C_2$  rotatie-as en het  $\sigma_h$ -spiegelvlak. Het  $i$ -inversiepunt is het massamiddelpunt, dus waar de  $C_2$ -as het spiegelvlak snijdt.

2.b Bekijk elk van de MO's en bepaal of ze symmetrisch (+1) of antisymmetrisch (-1) onder elk van de 4 symmetrieoperaties van de groep. Zo kan voor elk van de MO's vastgesteld worden volgens welke irrep ze transformeren (dus "wat hun symmetrie is"). Bijvoorbeeld voor de HOMO:

$E \rightarrow$  symmetrisch (+1)

$C_2 \rightarrow$  antisymmetrisch (-1)

$i \rightarrow$  symmetrisch (+1)

$\sigma_h \rightarrow$  antisymmetrisch (-1)

Zoek nu in de karakertabel de irrep met karakters +1,-1,+1,-1: de symmetrie van de HOMO is dus  $B_g$ .

Op dezelfde manier geldt voor de LUMO  $\rightarrow A_u$ ; en voor de LUMO+1  $\rightarrow B_g$ .

Het TDM beschrijft de overgangswaarschijnlijkheid. Voor de selectieregels is het alleen van belang of het TDM gelijk is aan 0 (verboden) of ongelijk aan 0 (toegestaan). Alleen als het argument van de integraal volledig symmetrisch is, is de uitkomst van de integraal  $\neq 0$ . Het product van de drie functies  $\Psi_i, \Psi_f$ , en  $\mu$  ( $\mu_x, \mu_y$ , of  $\mu_z$ ) moet dus transformeren als de totaal symmetrische representatie  $A_g$ . De symmetrieën van de elektronische toestanden zijn:

Grondtoestand: alle elektronen zijn gepaard, er zijn geen half-bezette orbitals, dus de golf functie is totaal symmetrisch  $\rightarrow \Gamma(\Psi_{gs}) = A_g$ .

Voor de aangeslagen toestanden vermenigvuldigen we de symmetrieën van de half-bezette orbitals, dus:

$\Gamma(\Psi_{excited}) = \Gamma(\text{HOMO}) \times \Gamma(\text{LUMO}) = B_g \times A_u = B_u$  (neem direct product van irreps in karaktertabel).

$\Gamma(\Psi_{excited2}) = \Gamma(\text{HOMO}) \times \Gamma(\text{LUMO}+1) = B_g \times B_g = A_g$ .

Nu kan voor elk van de overgangen afgeleid worden wat de symmetrie van het TDM moet zijn zodat de overgang toegestaan is:

- HOMO  $\rightarrow$  LUMO overgang

$$A_g \equiv \Gamma(\psi_{gs}) \otimes \Gamma(\mu) \otimes \Gamma(\psi_{exc}) = A_g \otimes \Gamma(\mu) \otimes B_u = B_u \otimes \Gamma(\mu)$$

Dit is waar als  $\Gamma(\mu) = B_u$ . Dit kan als het TDM langs de  $x$ - of  $y$ -as ligt.

- HOMO  $\rightarrow$  LUMO+1 overgang

$$A_g \equiv \Gamma(\psi_{gs}) \otimes \Gamma(\mu) \otimes \Gamma(\psi_{exc2}) = A_g \otimes \Gamma(\mu) \otimes B_g = B_g \otimes \Gamma(\mu)$$

Dit is waar als  $\Gamma(\mu) = B_g$ . Helaas transformeert geen van de componenten van het TDM ( $\mu_x, \mu_y$ , of  $\mu_z$ ) als  $B_g$ . Er kan dus niet aan de gelijkheid voldaan worden. De overgang is verboden.

- 2.c Het is duidelijk dat er precies 30 onafhankelijke bewegingsvrijheidsgraden zijn, namelijk beweging van elk van de 10 atomen in  $x$ -,  $y$ -, en  $z$ -richting:  $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{10}, y_{10}, z_{10})$ . Deze individuele bewegingen van alle atomen vormen weliswaar een orthogonale set, maar ze voldoen niet aan de symmetrie van het systeem. Er is een lineaire transformatie mogelijk om te komen tot 30 "symmetry adapted" orthogonale vrijheidsgraden. In deze vraag gaat het er alleen om te bepalen hoeveel bewegingsvrijheidsgraden er zijn van elke symmetrie species  $A_g, B_g, A_u$  en  $B_u$ . Hiervoor kijken we hoe de 30 originele vrijheidsgraden transformeren onder elk van de 4 symmetrie-operaties van de groep. We bepalen dan het karakter van deze operaties in de 30-dimensionale basis. Deze kunnen we dan projecteren op de vier 1-dimensionale irreps. Zo zien we hoeveel keer elke irrep voorkomt in de 30-dimensionale representatie. Operator  $\hat{E}$  laat



alle atomen op hun plaats en draait geen van de  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -assen.  $\hat{E}$  kan dus voorgesteld worden als een 30-dimensionale eenheidsmatrix:

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Het karakter is het spoor van de matrix:  $\chi(\hat{E}) = \text{Tr}(\hat{E}) = 30$ .

Operator  $\hat{C}_2$  legt elk atoom op een ander (weliswaar identiek) atoom. Dit betekent dat in de matrix die  $\hat{C}_2$  voorstelt, alle diagonaalelementen gelijk aan 0 zijn. Het spoor van de matrix is dus 0.

$$\hat{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & \dots & & ? \\ & & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ ? & \dots & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Het karakter is het spoor van de matrix:  $\chi(\hat{C}_2) = \text{Tr}(\hat{C}_2) = 0$ .

Voor de operator  $\hat{i}$  geldt hetzelfde: alle atomen worden verwisseld dus alle diagonaalelementen zijn 0. Het karakter is dus ook 0:  $\chi(\hat{i}) = 0$ . Operator  $\hat{\sigma}_h$ , spiegeling in het vlak van het molecuul, laat alle atomen op hun plaats en transformeert de  $x$ -,  $y$ -, en  $z$ -assen als:  $x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z$ . In matrixvorm ziet dit er zo uit:

$$\hat{\sigma}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Het karakter is  $\chi(\hat{\sigma}_h) = \text{Tr}(\hat{\sigma}_h) = 10$ .

We hebben zo een reduceerbare representatie van alle bewegingen gevonden:  $\frac{1}{h}\Gamma_{redu} = (30, 0, 0, 10)$ . De representatie kan gezien worden als

een vector van karakters. We kunnen deze vector projecteren op elk van de vier irreps, die beschouwd kunnen worden als de (ongenormaliseerde) eenheidsvectoren van de symmetrieruimte. We doen dit door het inproduct te nemen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Gamma_{redu} \cdot \Gamma_{A_g} &= \frac{1}{4}(30 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot 1) = 10 \\ \frac{1}{h}\Gamma_{redu} \cdot \Gamma_{B_g} &= \frac{1}{4}(30 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot 1 + 10 \cdot -1) = 5 \\ \frac{1}{h}\Gamma_{redu} \cdot \Gamma_{A_u} &= \frac{1}{4}(30 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + 10 \cdot -1) = 5 \\ \frac{1}{h}\Gamma_{redu} \cdot \Gamma_{B_u} &= \frac{1}{4}(30 \cdot 1 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot -1 + 10 \cdot 1) = 10\end{aligned}$$

Hierin is  $h = 4$  de orde van de groep. De 30 symmetry-adapted coördinaten hebben dus de symmetrieën  $10A_g \oplus 5B_g \oplus 5A_u \oplus 10B_u$ . Drie van deze 30 coördinaten zijn de translatie van het molecuul als geheel langs de  $x$ -,  $y$ -, en  $z$ -richting. Deze translaties transformeren volgens de karaktertabel als  $B_u(x)$ ,  $B_u(y)$  en  $A_u(z)$ . Verder corresponderen 3 van de coördinaten met rotatie (om  $x$ -,  $y$ -, en  $z$ -as) van het molecuul als geheel. Deze coördinaten transformeren als  $B_g(R_x)$ ,  $B_g(R_y)$  en  $A_g(R_z)$ . De overige  $30 - 6 = 24$  coördinaten zijn de vibratiecoördinaten, die alleen (symmetry adapted!) bewegingen van de atomen t.o.v. elkaar beschrijven. De representatie die deze vibrationele normal modes voorstelt kan nu eenvoudig afgeleid worden als alle bewegingen minus translatie en rotatie:

$$\begin{aligned}\Gamma_{vib} &= \Gamma_{beweging} \ominus \Gamma_{trans} \ominus \Gamma_{rot} \\ &= 10A_g \oplus 5B_g \oplus 5A_u \oplus 10B_u \ominus A_u \ominus 2B_u \ominus A_g \ominus 2B_g \\ &= 9A_g \oplus 3B_g \oplus 4A_u \oplus 8B_u\end{aligned}$$

### 3. Statistical Mechanics: Classical versus Quantum ideal gas

Dr. M. Titov

Radboud Universiteit Nijmegen

10 punten

- 3.a** We have to take advantage of the definition of the partition function for the classical gas (given in the main text of the Question):  
**[1.5 punten]**

$$Z_N^{\text{cl}} = \frac{1}{N!} \int \int \frac{d^{3N}\vec{p} d^{3N}\vec{q}}{h^{3N}} e^{-\beta H(\vec{p}, \vec{q})}. \quad (3.1)$$

In order to find the pressure we have to establish the dependence of the partition function on the volume of the gas. For the Hamiltonian function we find

$$Z_N^{\text{cl}} = \frac{1}{N!} Z_1^N, \quad Z_1 = \int \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{q}}{h^3} e^{-\beta p^2/2m} = u(\beta) V, \quad (3.2)$$

where

$$u(\beta) = V \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} e^{-\beta p^2/2m}. \quad (3.3)$$

Thus, we find that the partition function is proportional to the volume of the gas in the power  $N$ :  $Z_N^{\text{cl}} \propto V^N$ . That means that the derivative of the logarithm of the partition function over  $V$  equals the density of the gas:

$$\frac{\partial \ln Z_N^{\text{cl}}}{\partial V} = \frac{N}{V}. \quad (3.4)$$

Using the definition of the pressure as a derivative of the free energy, as given in the main text of the Question, we find

$$P = P_{\text{cl}} = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N} = k_B T \frac{\partial \ln Z_N^{\text{cl}}}{\partial V} = k_B T \frac{N}{V}. \quad (3.5)$$

- 3.b** Quantum nature of particles reveals itself in quantum statistics: fermion wave-functions are fully anti-symmetric functions, while boson wave-functions are fully symmetric. As the result the fermion wave function vanishes when the coordinates of two fermions coincide. Since the  
**[1.5 punten]**

wave-function is a continuous function the phenomenon is noticeable even at a finite distance between the fermions: the probability to find two identical fermions in a close proximity of each other is close to zero and is substantially smaller than the corresponding probability for the classical particles. From classical point of view we may say that there exists some statistical repulsive interaction between the fermions which is caused by the wave-function anti-symmetrization (i.e. by the Pauli principle). The effective repulsion of fermions means that it becomes harder to add another fermion to a quantum gas, than a classical particle to the corresponding classical gas. It also means that the pressure exerted by  $N$  fermions on the walls of a system with the volume  $V$  at temperature  $T$  is larger than the pressure of the corresponding ideal classical gas kept at the same conditions.

For bosons the situation is opposite. The quantum statistics of bosons can be viewed as effective attraction, hence the pressure produced by the ideal Bose gas is smaller than the pressure of the corresponding classical gas.

3.c  
[4 punten]

We have to use the definition

$$Z_N = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\vec{k}} \langle \Psi_{\vec{k}} | e^{-\beta \hat{H}} | \Psi_{\vec{k}} \rangle, \quad (3.6)$$

where the eigenfunctions are anti-symmetrized:

$$\Psi_{\vec{k}} = \Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_1) \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_2) - \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_2) \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_1) \right), \quad (3.7)$$

and the function  $\phi_{\vec{k}}(\vec{r})$  stands for the properly normalised solution of the single-particle Schrödinger equation in a box

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \varepsilon_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad \varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \int_V d^2 \vec{r} \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad (3.8)$$

where  $\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$  is the Kronecker delta. It is easy to see that  $\Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}$  is the eigenstate of the two-particle Hamiltonian by construction, i.e.

$$\hat{H} \Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} = (\varepsilon_{\vec{k}_1} + \varepsilon_{\vec{k}_2}) \Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}. \quad (3.9)$$

The calculation of  $Z_2$  is, therefore, reduced to the following expression

$$Z_2 = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} e^{-\beta(\varepsilon_{\vec{k}_1} + \varepsilon_{\vec{k}_2})} \int \int d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 \left| \Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right|^2. \quad (3.10)$$

The integration is performed using Eqs. (3.7,3.8) as

$$\int \int d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 \left| \Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right|^2 = 1 - \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}, \quad (3.11)$$

thus, we obtain

$$Z_2 = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} e^{-\beta(\varepsilon_{\vec{k}_1} + \varepsilon_{\vec{k}_2})} - \sum_{\vec{k}} e^{-2\beta\varepsilon_{\vec{k}}}.$$

The summation over  $k$ -vectors is simplified in the limit of a large system volume by replacing it with an integration according to the rule

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow V \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}, \quad (3.12)$$

hence

$$Z_2 = (Vu(\beta))^2 - Vv(\beta), \quad (3.13)$$

where

$$u(\beta) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-\beta\varepsilon_{\vec{k}}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} e^{-\beta p^2/2m}, \quad (3.14)$$

$$v(\beta) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-2\beta\varepsilon_{\vec{k}}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{h^3} e^{-\beta p^2/m}. \quad (3.15)$$

The partition function  $Z_2$  in Eq. (3.13) provides the answer to the sub-question.

**3.d**  
[1.5 punten]

The calculation of the pressure is straightforward once the dependence of the partition function on the volume is known,

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = k_B T \frac{\partial \ln Z_2}{\partial V}. \quad (3.16)$$

From Eq. (3.13) the logarithm of the partition function is given by

$$\ln Z_2 = 2 \ln(uV) + \ln \left( 1 - \frac{v}{u^2 V} \right), \quad (3.17)$$

therefore we find the pressure

$$P = k_B T \left( \frac{2}{V} + \frac{v}{u^2 V^2 (1 - v/(u^2 V))} \right) \approx k_B T \left( \frac{2}{V} + \frac{v}{u^2 V^2} \right). \quad (3.18)$$

This result has to be compared with the corresponding classical result for 2 particles:  $P_{\text{cl}} = k_B T \frac{2}{V}$ . Since the coefficient  $v$  given by the integral in Eq. (3.15) is manifestly positive, we find  $P > P_{\text{cl}}$  as was anticipated.

3.e

[1.5 punten]

Bosons are characterised by the symmeterized wave function

$$\Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_1) \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_2) + \phi_{\vec{k}_1}(\vec{r}_2) \phi_{\vec{k}_2}(\vec{r}_1) \right). \quad (3.19)$$

Thus, the only difference with respect to the calculation of the previous subquestion is in the sign. Instead of Eq. (3.11) one finds

$$\int \int d^2 \vec{r}_1 d^2 \vec{r}_2 \left| \Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right|^2 = 1 + \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}. \quad (3.20)$$

Consequently, the result for the partition function is given by

$$Z_2 = (Vu)^2 + Vv, \quad \ln Z_2 = 2 \ln(uV) + \ln \left( 1 + \frac{v}{u^2 V} \right). \quad (3.21)$$

Thus, the pressure

$$P = k_B T \left( \frac{2}{V} - \frac{v}{u^2 V^2 (1 + v/(u^2 V))} \right) \approx k_B T \left( \frac{2}{V} - \frac{v}{u^2 V^2} \right), \quad (3.22)$$

is smaller than the corresponding classical result,  $P < P_{\text{cl}}$ , as anticipated.

## 4. Torsiemagnetometer

Prof. dr. P. Christianen  
Radboud Universiteit Nijmegen  
10 punten

- 4.a De energie van een magnetisch moment  $\vec{m}$  in een *ruimtelijk homogeen* magneetveld  $\vec{B}$  is gegeven door  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$ , waarbij  $\theta$  de hoek tussen  $\vec{B}$  en  $\vec{m}$  is. (Voor het gemak neem ik hier even aan dat  $|\vec{m}|$  niet afhangt van  $\vec{B}$ , maar dit verandert de conclusie niet).  $U$  hangt dus af van de hoek tussen het magnetisch veld en het magnetisch moment en is minimaal als  $\theta = 0$ . Dit impliceert dat er een torsiekracht is om  $\vec{m}$  uit te lijnen langs  $\vec{B}$ :  $\vec{\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{\theta} = -mB \sin \theta \hat{\theta} = \vec{m} \times \vec{B}$ . Dit is de eerste term in de vergelijking.

In een *ruimtelijk inhomogeen* magneetveld hangt  $U$  af van de positie. Dit levert een magnetische kracht  $\vec{F} = \vec{\nabla} U = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}$  op, dus een kracht in een magneetveldgradiënt. Dit levert een torsiekracht  $\vec{\tau} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \times \vec{r}$  op als het sample geplaatst wordt op positie  $\vec{r}$  vanaf het draaipunt van de bovenste condensatorplaat. Dit is de tweede term in de vergelijking.

- 4.b Invullen van  $\vec{m} = \vec{m}_{\parallel} + \vec{m}_{\perp}$  in  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} + \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \times \vec{r}$  levert:  $\vec{\tau} = (\vec{m}_{\parallel} + \vec{m}_{\perp}) \times \vec{B} + \vec{\nabla} ((\vec{m}_{\parallel} + \vec{m}_{\perp}) \cdot \vec{B}) \times \vec{r} = \vec{m}_{\perp} \times \vec{B} + \vec{\nabla} (\vec{m}_{\parallel} \cdot \vec{B}) \times \vec{r}$ . In een *ruimtelijk homogeen* veld is de tweede term nul en meet je dus alleen  $\vec{m}_{\perp}$ . In een veldgradiënt geven beide termen een bijdrage. Door eerst  $\vec{m}_{\perp}$  te meten en daarna deze term af te halen van de meting in een gradiënt kun je  $\vec{m}_{\parallel}$  en  $\vec{m}_{\perp}$  afzonderlijk bepalen. Het resultaat kan ook nog afhangen van de richting van  $\vec{m}_{\parallel}$  in het  $xy$  vlak. Om deze geheel vast te leggen heb je dus minimaal 3 metingen nodig.

- 4.c Wil je een materiaal uitlijnen in een homogeen magneetveld heb je dus een  $\vec{m}_{\perp}$  component nodig. Hiervoor heb je in alle gevallen anisotropie nodig.

- In het geval van een ferromagneet hoef je het materiaal alleen met de magnetisatie-as (anisotropie!) onder een hoek te zetten met het homogene veld. Dan wordt het materiaal uitgelijnd als een kompasnaald.

- In het geval van standaard dia- of paramagnetisme is het magnetisch moment proportioneel met het aangelegde magneetveld:  $\vec{m} = \chi \vec{B}$  met  $\chi$  de magnetische susceptibiliteit die negatief (positief) is in het geval van een diamagneet (paramagneet). Echter, omdat  $\vec{m} = \chi \vec{B}$  staat  $\vec{m}$  altijd anti-parallel (diamagnetisme) of parallel (paramagnetisme) aan  $\vec{B}$ . In dit geval is  $\vec{m}_\perp = 0$  en kun je het magnetisch moment niet meten met een torsiemagnetometer, maar alleen in een veld gradiënt, zoals gebeurt in een magnetische balans. Voor anisotrope materialen is  $\chi$  echter een tensor, bv tgv kristalvelden, spin-baan koppeling of anisotrope chemische structuur, en kan er wel een loodrecht magnetisch moment optreden. Belangrijk is dat de anisotropie goed bepaald is, bijvoorbeeld door éénkristallen te gebruiken die je goed ruimtelijk kunt oriënteren.

**4.d** Uit opgave b) blijkt dat je dus minimaal drie metingen moet doen om zowel  $\vec{m}_\parallel$  en  $\vec{m}_\perp$  te bepalen. Hierbij moet je onderscheid maken tussen homogene en inhomogene velden. In de praktijk betekent dit het onderscheid tussen het veldcentrum van de magneet (maximum veld  $B_0$  met gradiënt  $dB/dz = 0$ ) en buiten het veldcentrum waar de veldsterkte lager is ( $B < B_0$ ) maar waar wel een gradiënt aanwezig is ( $dB/dz \neq 0$ ). Uit opgave b) volgt  $\vec{m}_\perp \times \vec{B} + ((\vec{m}_\parallel \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}) \times \vec{r} = m_\perp B + m_\parallel r \frac{dB}{dz} = m_\perp B + m_\parallel r B \frac{d\beta}{dz}$ , waarbij  $\beta$  de genormaliseerde magnetische veldwaarde is en  $d\beta/dz$  het genormaliseerde veldprofiel. Dit geeft:  $\tau = (m_\perp + \alpha(z)m_\parallel) B$ , waarbij  $\alpha(z)$  bepaald wordt door  $d\beta/dz$  op een bepaalde verticale positie in de magneet en de gekozen waarde voor  $r$  (typisch 1-10 mm).

- Een eindige torsiekracht geeft een verandering van de afstand  $d$  tussen de twee platen wat leidt tot een verandering van  $C$ . Meet dus de verandering van de capaciteit  $C$  als functie van een aangelegd magneetveld:  $\Delta C = C(B_0) - C_0$  met  $C_0 = C(B_0 = 0)$  is de waarde van de capaciteit in de evenwichtsituatie:  $C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0}$ , waarbij  $d_0$  de afstand is bij  $B = 0$ . Dus  $\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\epsilon_0 A/d - \epsilon_0 A/d_0}{\epsilon_0 A/d_0} = \frac{1}{1 + \Delta d/d_0} - 1$ , met  $\Delta d - d - d_0 = d_0 \left( \frac{1}{1 + \Delta C/C_0} - 1 \right)$ . Door  $\Delta C$  te meten met een capaciteitsmeter meet je dus de veranderde afstand tussen de platen.
- De absolute waarde van de magnetisatie kun je op verschillende manieren bepalen:
  - ★ Uitrekenen wat de uitwijking is van de capaciteitsplaat bij een gegeven kracht. Dit is echter lastig want dan moet je ook de mechanische eigenschappen van de topplaat van de capaciteit weten.



- ★ Calibratie van de magnetometer aan de hand van een gecalibreerd materiaal of door het meten van het magnetisch moment van een klein stroomspoeltje van een gegeven grootte  $A_0$ , een gegeven aantal wikkelingen  $N$  en een gegeven stroomsterkte  $I$ . Dit is handig omdat je dan ook de lineariteit van de magnetometer kunt testen door de capaciteitsverandering te meten als functie van de stroomsterkte ( $m = NA_0I$ ).
- $\tau = (m_{\perp} + \alpha(z)m_{\parallel}) B$ , dus meet eerst  $\tau$  in  $z = 0$  waar  $\alpha(0) = 0$  om  $m_{bot}$  te bepalen. Meet daarna  $\tau$  in  $z \neq 0$ , bijvoorbeeld voor  $z = 10$  mm (stippelijnen in figuur).  $\alpha(z)$  heeft daar een bepaalde waarde, waaruit  $m_{\parallel}$  bepaald kan worden. Dit herhalen voor tenminste twee hoeken van het sample in het  $xy$  vlak.
- $\tau = (m_{\perp} + \alpha(z)m_{\parallel}) B$ , dus de relatieve gevoeligheid wordt gegeven door  $\alpha(z)$  die bepaald wordt door  $d\beta/dz$  op een bepaalde verticale positie in de magneet en de gekozen waarde voor  $r$  (typisch 1-10 mm). Voor  $z = 10$  mm geldt  $d\beta/dz \approx 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$  en  $r \approx 10$  mm geeft  $\alpha(z) \approx 0.01$ . De torsiekracht die correspondeert met  $m_{\parallel}$  dus  $> 100$  kleiner dan die van  $m_{\perp}$ . Een torsiemagnetometer is dus met name gevoelig voor  $m_{\perp}$ .

## 5. Rigid Body Rotations and Chandler Wobble

Dr. G.A Blab  
Universiteit Utrecht  
10 punten

5.a We can calculate the elements of the inertial tensor from the formula:

$$I = \int dx \int dy \int dz \rho(x, y, z) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

The integration boundaries for  $z$  are given by the definition of the oblong spheroid  $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ; for  $x$  and  $y$  we also know use that  $x^2 + y^2 = a^2$ .

For the moments, we need to calculate the integrals over  $x^2$ ,  $y^2$ , and  $z^2$ :

$$\begin{aligned} \rho \iiint x^2 dV &= \rho \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x^2 dz = \\ &= \rho \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \frac{2b}{a} x^2 \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \\ &= \rho \int_{-a}^a dx \frac{b\pi x^2 (a^2-x^2)}{a} = \\ &= \frac{4}{15} \rho a^4 b \pi = \frac{1}{5} M a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \iiint y^2 dV &= \rho \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} y^2 dz = \\ &= \frac{1}{5} M a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \iiint z^2 dV &= \rho \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x^2 dz = \\ &= \rho \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \frac{2b^3}{3a^3} (a^2-x^2-y^2)^{3/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \int dx \frac{b^3 \pi (a^2 - x^2)^2}{4a^3} = \\
&= \frac{4}{15} \rho a^2 b^3 \pi = \frac{1}{5} M b^2
\end{aligned}$$

This leads us to:

$$I = R_{\text{eq}}^2 M \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{R_{\text{polar}}}{R_{\text{eq}}}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \left(\frac{R_{\text{polar}}}{R_{\text{eq}}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

The difference between these two values ( $\frac{1}{2}(1 - \left(\frac{R_{\text{polar}}}{R_{\text{eq}}}\right)^2)$ , to be exact) is indeed close to 1/300.

- 5.b** The form of Newton's law we are looking for is  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . For a rotation, this becomes  $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , with  $\vec{\Gamma}$  the torque acting on the body, and  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  the change of the angular momentum *in an inertial system*. To derive the Euler equation(s), we need to transform this into the (non-inertial) body frame, where the time derivative gains an extra term:

$$\vec{\Gamma} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L},$$

where the "dot" now refers to a simple time derivative in the non-inertial coordinate system. As the the coordinate axes of the body fram are principal axes, we know that  $\vec{L} = (\lambda_1 \omega_1, \lambda_2 \omega_2, \lambda_3 \omega_3)$ . Writing out the cross product, we obtain:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3) \omega_2 \omega_3 &= \Gamma_1 \\
\lambda_2 \dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_3 \omega_1 &= \Gamma_2 \\
\lambda_3 \dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \omega_2 &= \Gamma_3
\end{aligned}$$

Without external torque and for  $\lambda_1 = \lambda_2$  we get

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \dot{\omega}_1 - (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\
\lambda_2 \dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\
\lambda_3 \dot{\omega}_3 &= 0
\end{aligned}$$

- 5.c** We see that  $\dot{\omega}_3 = 0$  and thus  $\omega_3 = \text{const}$ :

$$\dot{\omega}_1 - \underbrace{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_3\right)}_{\Omega_b} \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1} \omega_3\right) \omega_1 = 0$$

You can now either use the trick of turning the two equations into a single, complex differential equation by using  $\omega_1 + i\omega_2 = \eta$  and therefore  $\dot{\eta} = -i\Omega_b \eta$ , or by directly trying the test solutions  $\omega_1 = \omega_0 \cos \Omega_b t$  and  $\omega_2 = -\omega_0 \sin \Omega_b t$ .

This describes a circular “wobble” of  $\vec{\omega}$  around  $\hat{e}_3$  with angular frequency  $\Omega_b = \frac{1}{305} \omega_3$ . As the latter is the rotation of earth (period roughly 1 day), the period of the Chandler Wobble is 305 days.

- 5.d The two assumptions that are violated are: (1) there are external (gravitational) torques acting on earth as it is not a perfectly homogeneous sphere, and, more importantly, (2) Earth is *not* a rigid body (remember the tides?).

## 6. Emission, energy transfer and time-resolved spectroscopy

Dr. Ir. A. Huijser  
Universiteit Twente  
10 punten

**6.a** Optical transitions are vertical because of the Franck-Condon principle, which states that electronic transitions in molecules occur before nuclei have time to adjust. Absorption will mainly occur from the lowest vibrational level of the  $S_0$  state to all vibrational levels of the  $S_1$  state. I.e.  $0 \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow 1$  and  $0 \rightarrow 2$ . This will be followed by ultrafast vibrational relaxation and emission from the lowest excited state to all ground state levels, i.e.  $0 \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow 1$  and  $0 \rightarrow 0$ . Absorption and emission will thus -approximately- be mirror images.

**6.b** First reason: this approximation is based on the assumption that the  $S_1$  vibrational levels are similar to the  $S_0$  vibrational levels, which is not necessarily the case.

Second reason: emission may also originate from a  $T_1$  state (i.e. phosphorescence) rather than a  $S_1$  state.

**6.c** In absence of eet to molecule B:

$$\tau_{f,A} = \frac{1}{k_{nr} + k_{f,A} + k_{isc}} = 83 \text{ ps} \quad (6.1)$$

$$\phi_{f,A} = \frac{k_{f,A}}{k_{nr} + k_{f,A} + k_{isc}} = 0,08 \quad (6.2)$$

In presence of eet to molecule B:

$$\tau_{f,A} = \frac{1}{k_{nr} + k_{f,A} + k_{isc} + k_{eet}} = 1 \text{ ps} \quad (6.3)$$

$$\phi_{f,A} = \frac{k_{f,A}}{k_{nr} + k_{f,A} + k_{isc} + k_{eet}} = 9,9 \cdot 10^{-4} \quad (6.4)$$

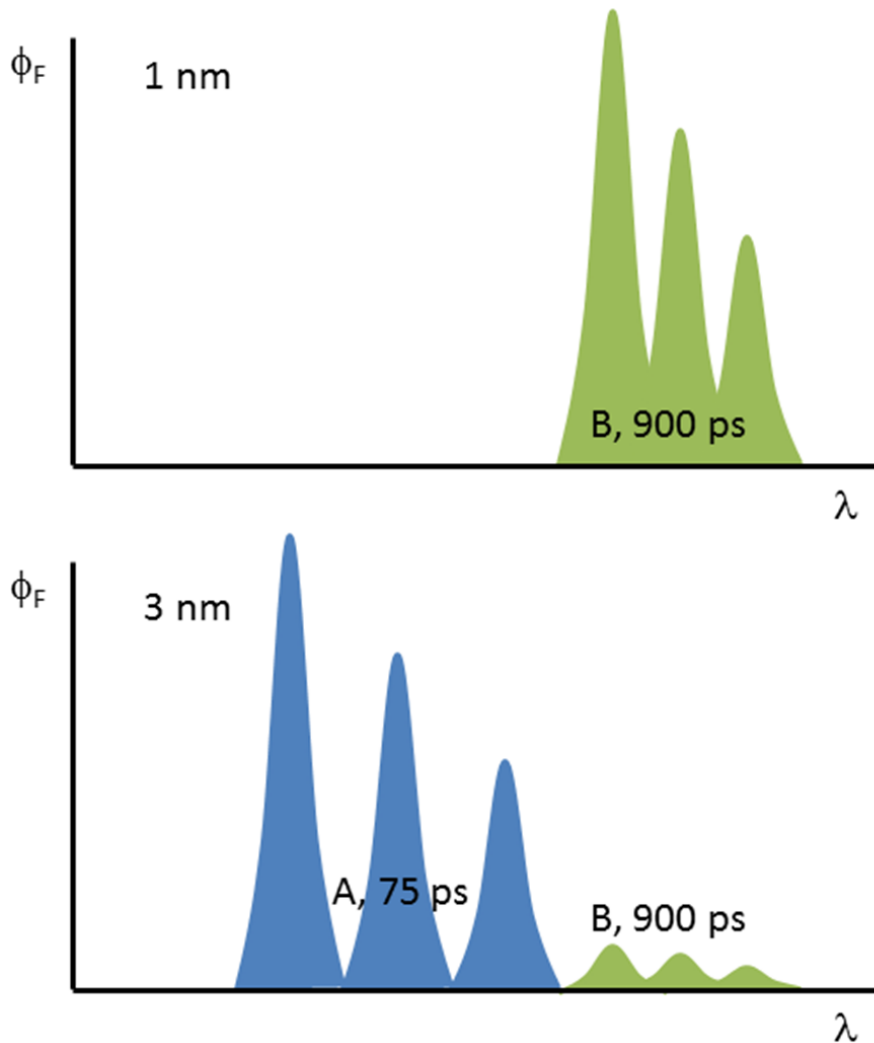
In conclusion, the lifetime changes from 83 ps to 1 ps; the quantum yield from 0,08 to  $9,9 \cdot 10^{-4}$ .

- 6.d The emission from A only will get 75 times brighter and the lifetime will increase from 1 ps to 75 ps. The energy transfer yield is given by:

$$\phi_{eet} = \frac{k_{eet}}{k_{nr} + k_{f,A} + k_{isc} + k_{eet}} \quad (6.5)$$

At 1 nm distance the yield equals 0,99. At 3 nm distance the yield is reduced to 0,10.

- 6.e The intrinsic emission quantum yields for A and B ( $k_f \times \tau_F$ ) are almost similar (0,08 and 0,09). The intrinsic lifetime of B ( $1/(k_F + k_{nr})$ ) is 900 ps. Changing the distance from 1 nm to 3 nm will therefore result in the following trends:



Figuur 6.1

## 7. Concentrated Solar Power - Carnot cycle power generator

Prof.dr. C.R. Kleijn  
Technische Universiteit Delft  
10 punten

7.a The solar energy absorbed by the Carnot generator equals

$$Q_{abs} = \alpha ACq''_{sol} \quad (7.1)$$

with  $\alpha$  the absorptivity of the generator's surface, and  $A$  its surface area.

The hot generator emits an amount of thermal radiation

$$Q_{emit} = \epsilon \sigma A [T_G^4 - T_0^4] \approx \epsilon \sigma AT_G^4 \quad (7.2)$$

with  $\epsilon$  the emissivity of the generator's surface,  $T_G$  the generator temperature and  $T_0$  the ambient temperature. Assuming that the generator behaves as a black body radiator ( $\alpha = \epsilon = 1$ ), we find to the fraction of incoming solar power that is available for the Carnot cycle

$$\chi = \frac{Q_{abs} - Q_{emit}}{ACq''_{sol}} = 1 - \frac{\sigma T_G^4}{Cq''_{sol}} \quad (7.3)$$

7.b A Carnot cycle at temperature  $T_G$  in an ambient temperature  $T_0$  has an efficiency

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T_G} \quad (7.4)$$

The overall solar-to-work efficiency of the system now equals

$$\zeta = \chi \cdot \eta = \left(1 - \frac{\sigma T_G^4}{Cq''_{sol}}\right) \left(1 - \frac{T_0}{T_G}\right) \quad (7.5)$$

7.c The maximum temperature  $T_{max}$  is the temperature for which all incoming radiation is re-emitted, or  $\chi = 0$ , leading to

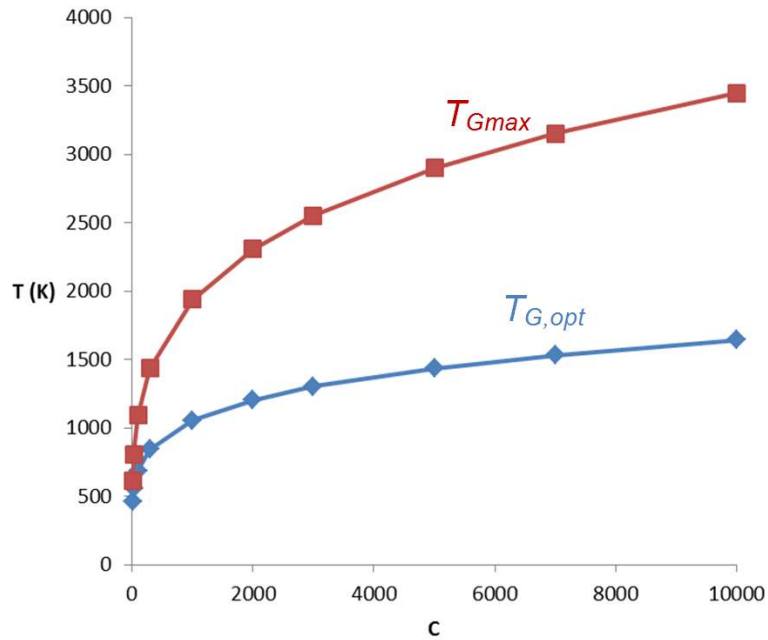
$$T_{G,max} = \left(\frac{Cq''_{sol}}{\sigma}\right)^{1/4} \quad (7.6)$$

7.d The optimum generator temperature  $T_{G,opt}$  is the temperature for which  $\zeta$  is maximum. This is found from

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial T_G} \right|_{T_{G,opt}} = \left( 1 - \frac{\sigma T_{G,opt}^4}{C q''_{sol}} \right) \frac{T_0}{T_{G,opt}^2} - \left( 1 - \frac{T_0}{T_{G,opt}} \right) \frac{4\sigma T_{G,opt}^3}{C q''_{sol}} = 0 \quad (7.7)$$

$$T_{G,opt}^5 - \frac{3T_0}{4} T_{G,opt}^4 - \frac{C q''_{sol}}{4\sigma} T_0 = 0 \quad (7.8)$$

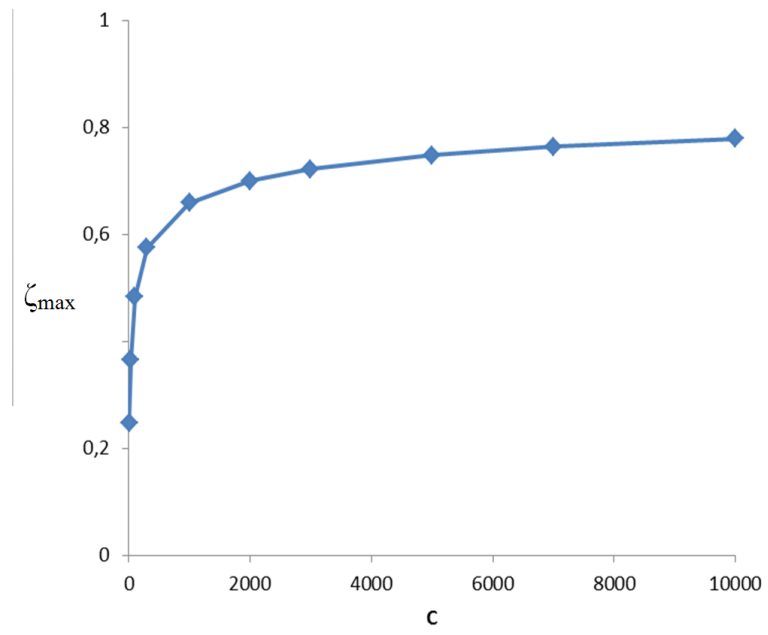
Solving numerically this equation allows to obtain the optimum temperature  $T_{opt}$



Figuur 7.1

substituting the optimum temperature into eq. (7.5), with  $q''_{sol} = 800$  W/m<sup>2</sup>, leads to the following dependence of  $\zeta_{max}$  on C:





Figuur 7.2

## 8. Een afgeremd elektron

Drs. H. Jordens  
Rijksuniversiteit Groningen  
10 punten

**8.a**  
[1.5 punten] Klassiek geldt:  $F_C = \frac{mv^2}{R} = Bqv$  zodat  $p = BqR$ . Met de relativistische uitdrukking voor de impuls  $p = \gamma\beta mc$  volgt dan  $\gamma\beta = \frac{Bq}{mc}R = \frac{Bc}{mc^2}R = \frac{1,2 \cdot 299792458}{0,511 \cdot 10^6}R = 704R$ . Met  $\gamma = \sqrt{1 + (\gamma\beta)^2} = 704$  volgt  $\gamma = 704R$ .

**8.b**  
[0.5 punten] Als  $\beta = 0,999$  dan is  $\gamma = 22,37$  en  $R = 0,032$  m. Dus tot en met punt 4 is de snelheid van het elektron nog boven de 99,9% van de lichtsnelheid.

**8.c**  
[2.5 punten] Voor  $R = 0,010$  m is  $\beta \approx 0,99$ . We mogen dus stellen dat het elektron gedurende het grootste deel van de baan met ongeveer de lichtsnelheid gaat. Omdat de snelheid bijna overal hetzelfde is, zal het energieverlies per meter constant zijn:  $\frac{dE}{ds} = -k$ . Omdat  $\beta \approx 1$  is de impuls van het elektron  $p = \gamma\beta mc \approx \gamma mc = \frac{E}{c}$ . Met  $p = BqR$  volgt  $E = Bqc \cdot R$ . Een kleine verplaatsing langs de baan van het elektron is  $ds = R d\theta$  zodat uit  $\frac{dE}{ds} = -k$  volgt dat  $-k = \frac{dE}{ds} = \frac{Bqc}{R} \cdot \frac{dR}{d\theta}$ . Hieruit volgt:  $\frac{dR}{R} = -\frac{k}{Bqc} \cdot d\theta = -\mu\theta$  zodat  $R = R(0)e^{-\mu\theta}$ .

**8.d**  
[4 punten] De beste methode is om alle punten in de berekening te betrekken. Uit de grafiek van  $\ln(R)$  als functie van de hoek volgt dan het energieverlies per meter. Door de totale lengte van de baan vanaf punt 1 te berekenen volgt de kinetische energie in punt 1. Uit  $R = R(0)e^{-\mu\theta}$  volgt  $\ln\left(\frac{R}{R(0)}\right) = -\frac{k}{Bqc} \cdot \theta$ .

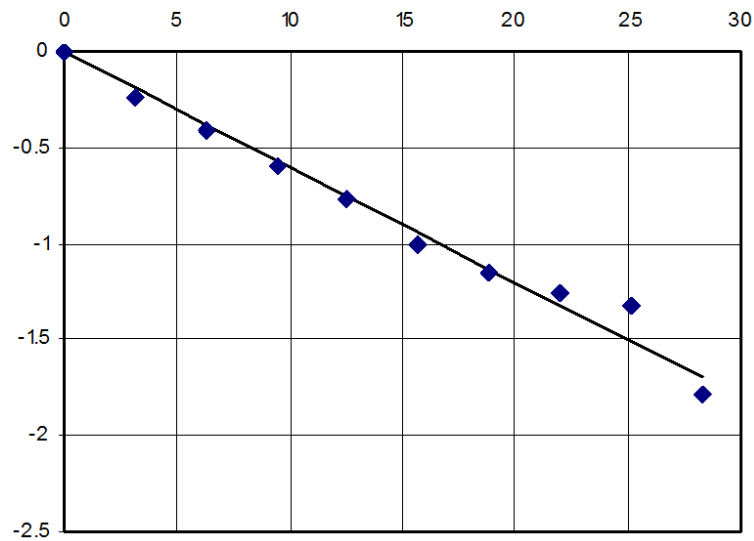
Uit deze grafiek volgt dat de richtingscoëfficiënt  $\frac{1,5}{25} = 0,06$  zodat  $k = 0,06 \cdot 1,2 \cdot 1,6 \cdot e^{-19} \cdot 299792458 = 21,6$  MeV/m.

De totale lengte van de baan vanaf punt 1 is:

$$s = \int_0^{\infty} ds = \int_0^{\infty} R d\theta = \frac{R}{-\mu} \cdot e^{-\mu\theta} \Big|_0^{\infty} = \frac{R}{\mu} = \frac{0,06}{0,06} = 1 \text{ m}$$

De energie in punt 1 is dan  $E_1 = ks = 21,6$  MeV.

**8.e**  
[2.5 punten] Bereken uit de kromtestraal in punt 1 de kinetische energie. Uit de berekening van de baan volgt dan het energieverlies per meter. Dit is minder goed omdat maar 1 meetpunt in de berekening meegenomen wordt.



**Figuur 8.1** Resultaat van de  
logaritme van  $\frac{R}{R(0)}$  tegen hoek  $\theta$ .

De kinetische energie in punt 1 is:  $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ . Uit  $R = 0,060$  m volgt  $\gamma = 704 \cdot 0,060 = 42,2$  zodat  $E_k = (42,2 - 1) \cdot 0,511 \cdot 10^6 = 21,1$  MeV.

De lengte van de baan vanaf punt 1 is weer 1,0 m (op gelijke wijze als bij vraag d). Dus het energieverlies per meter is 21,1 MeV/m.

## 9. Nucleosynthesis in het vroege Heelal

Prof. dr. G. Nelemans  
 Radboud Universiteit Nijmegen  
 10 punten

**9.a** De golflengte van de fotonen zet uit met de schaalfactor  $\lambda \propto a$  en de energie van een foton is  $kT = \frac{hc}{\lambda}$  dus  $T \propto \lambda^{-1} \propto a^{-1}$ .  
 Voor adiabatische expansie geldt  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ , dus  $\gamma = 4/3 \rightarrow T \propto V^{-1/3}$  en  $V \propto a^3$  dus  $T \propto a^{-1}$ .

**9.b** Aantal vrije neutrinos zal sterk afnemen, vanwege annihilatie en de verhouding tussen neutronen en protonen zal afnemen vanwege verval van neutronen.

**9.c** De energieverdeling van deeltjes is vrij breed (Maxwellian), dus ook als de typische energie van deeltjes te laag is, zijn er nog deeltjes met voldoende energie.

**9.d** Als de uitdijning te snel gaat wordt de minimale energie die nodig is voor fusie zo snel bereikt dat er niet voldoende tijd is om helium te vormen. Als de uitdijning te langzaam gaat vervallen de neutronen voordat er helium gevormd kan worden.

**9.e** We nemen aan dat de fusiefase (0.03 MeV) bij  $t = 10$  min stopt. Uit de vergelijkingen:

$$\log a_f/a_i = \log T_i/T_f = \alpha \log t_f/t_i$$

Met  $T_i = 0.7$  MeV,  $T_f = 0.03$  MeV,  $t_i = 1$  s,  $t_f = 600$  s volgt  $\alpha = 0.5$ . Dat is dus de onder-limiet. En overigens ook de werkelijke waarde...

**9.f** Invullen van de massa's en  $kT = 0.7$  MeV, levert 0.156 op. Als alle neutronen in helium terechtkomen is de massa verhouding dus

$$Y = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{4(n_n/n_p)/2}{1 + n_n/n_p} = \frac{0.312}{1.156} = 0.27$$

Dus vrij dicht bij de waargenomen waarde.

# 10. Klein Tunneling in Graphene

Robert Sokolewicz  
Radboud Universiteit Nijmegen  
10 punten

**10.a** We need to solve the equation:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\Psi(x) &= \begin{pmatrix} V & i\hbar\nu\partial/\partial x \\ i\hbar\nu\partial/\partial x & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^A(x) \\ \phi^B(x) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \begin{pmatrix} \phi^A(x) \\ \phi^B(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

meaning,

$$i\hbar\nu\phi^{b'}(x) = (\epsilon - V)\phi^a(x) \quad (10.1)$$

and

$$i\hbar\nu\phi^{a'}(x) = (\epsilon - V)\phi^b(x) \quad (10.2)$$

by differentiating (10.1) and (10.2), we quickly find:

$$\phi^{b''}(x) = -\kappa^2\phi^b(x) \quad (10.3)$$

with  $\kappa^2 = (\epsilon - V)^2/(\hbar\nu)^2$ . I.e.

$$\epsilon = \hbar\nu|\kappa| + V \quad (10.4)$$

**10.b** First note that the eigen functions of  $\mathcal{H}$  are given by:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} e^{\pm i\kappa x} \quad (10.5)$$

the wave function can then be written as:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iqx} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\kappa x} & \text{for } x < 0 \\ Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tilde{q}x} + K \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\tilde{q}x} & \text{for } 0 \leq x \leq L \\ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iqx} & \text{for } x > L \end{cases}$$

with  $q = \epsilon/(\hbar\nu)$  and  $\tilde{q} = (\epsilon - V_0)/(\hbar\nu)$ . Since  $\Psi$  is a solution to a first order differential equation we only need to enforce continuity at  $x = 0$  and  $x = L$ :

$$\begin{aligned} 1 + r &= Q + KQe^{i\tilde{q}L} + Ke^{-i\tilde{q}L} = te^{iqL} \\ 1 - r &= Q - KQe^{i\tilde{q}L} - Ke^{-i\tilde{q}L} = te^{iqL}. \end{aligned}$$

By adding the top and bottom equations we quickly see that  $Q = 1$  and so:

$$t = \exp[i(\tilde{q} - q)L] \quad (10.6)$$

The transmission probability is  $T = tt^* = 1$ . Regardless of the size and strength of the potential barrier!

**10.c** We need to solve the equation:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Psi(x) &= \begin{pmatrix} V + mi\hbar\nu \partial/\partial x & \\ i\hbar\nu \partial/\partial x & V - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^a(x) \\ \phi^b(x) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \begin{pmatrix} \phi^a(x) \\ \phi^b(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.7)$$

meaning,

$$\begin{aligned} i\hbar\nu\phi^{b'}(x) &= (\epsilon - V - m)\phi^a(x) \\ i\hbar\nu\phi^{a'}(x) &= (\epsilon - V + m)\phi^b(x) \end{aligned} \quad (10.8)$$

by differentiating (10.8) we quickly find:

$$\phi^{b''}(x) = -\kappa^2\phi^b(x) \quad (10.9)$$

with  $\kappa^2 = ((\epsilon - V)^2 - m^2)/(\hbar\nu)^2$ . i.e.

$$(\epsilon - V_0)^2 = (\hbar\nu\kappa)^2 + m^2. \quad (10.10)$$

The eigenfunctions of (10.7) can be written as:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\alpha} e^{iqx}. \quad (10.11)$$

from eqs. (10.8) and (10.9) we find for  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\epsilon - V - m}{\nu k} \\
&= \text{sign}(k) \frac{\epsilon - V - m}{\sqrt{(\epsilon - V)^2 - m^2}} \\
&= \text{sign}(k) \sqrt{\frac{V - \epsilon - m}{V - \epsilon + m}}.
\end{aligned}$$

The wave equation then becomes:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{iqx} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} e^{-iqx} & \text{for } x < 0 \\ Q \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} e^{i\tilde{q}x} + K \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\tilde{q}x} & \text{for } 0 \leq x \leq L \\ t \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{iqx} & \text{for } x > L \end{cases}$$

where  $q$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\alpha$  and  $\bar{\alpha}$  are defined as:

$$\begin{aligned}
q &= \sqrt{\epsilon^2 - m^2}/(\hbar\nu) \quad \tilde{q} = \sqrt{(\epsilon - V_0)^2 - m^2}/(\hbar\nu) \\
\alpha &= \sqrt{\frac{\epsilon + m}{\epsilon - m}} \quad \bar{\alpha} = \sqrt{\frac{V_0 - \epsilon - m}{V_0 - \epsilon + m}}.
\end{aligned}$$

Since  $\Psi(x)$  is the solution to a first order differential equation we only need to enforce continuity at  $x = 0, L$ :

$$\begin{aligned}
1 + r &= Q + K \quad Qe^{i\tilde{q}L} + Ke^{-i\tilde{q}L} = te^{iqL} \\
\alpha(1 - r) &= \bar{\alpha}(Q - K) \bar{\alpha}(Qe^{i\tilde{q}L} - Ke^{-i\tilde{q}L}) = \alpha te^{iqL}.
\end{aligned}$$

by multiplying the first row by  $\bar{\alpha}$  and adding/subtracting the rows with each other we arrive at the following four equations:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} + \alpha + (\bar{\alpha} - \alpha)r &= 2\bar{\alpha}Q \quad 2\bar{\alpha}Qe^{i\tilde{q}L} = (\bar{\alpha} + \alpha)te^{iqL} \\
\bar{\alpha} - \alpha + (\bar{\alpha} + \alpha)r &= 2\bar{\alpha}K \quad 2\bar{\alpha}Ke^{-i\tilde{q}L} = (\bar{\alpha} - \alpha)te^{iqL}
\end{aligned}$$

from which we find:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{(\bar{\alpha} - \alpha)^2 - (\bar{\alpha} + \alpha)^2}{(\bar{\alpha} - \alpha)^2 e^{i(q+\tilde{q})L} - (\bar{\alpha} + \alpha)^2 e^{i(q-\tilde{q})L}} \\
&= \frac{-4\alpha\bar{\alpha}e^{-i(q+\tilde{q})L}}{(\bar{\alpha} - \alpha)^2 - (\bar{\alpha} + \alpha)^2 e^{-2i\tilde{q}L}}
\end{aligned}$$

and for the transmission probability:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{16\alpha^2\bar{\alpha}^2}{(\bar{\alpha} - \alpha)^4 + (\bar{\alpha} + \alpha)^4 \cos^2 2\tilde{q}L - 2(\bar{\alpha} - \alpha)^2(\bar{\alpha} + \alpha)^2 \cos 2\tilde{q}L + (\bar{\alpha} + \alpha)^4 \sin^2 2\tilde{q}L} \\
 &= \frac{16\alpha^2\bar{\alpha}^2}{(\bar{\alpha} - \alpha)^4 + (\bar{\alpha} + \alpha)^4 - 2(\bar{\alpha} - \alpha)^2(\bar{\alpha} + \alpha)^2 \cos 2\tilde{q}L} \\
 &= \frac{8\alpha^2\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}^4 + 6\bar{\alpha}^2\alpha^2 + \alpha^4 - (\bar{\alpha}^2 - \alpha^2)^2 \cos 2\tilde{q}L}
 \end{aligned}$$

not necessary, but with some tedious algebra and using  $\cos 2x = 1 - 2\sin x$  this can be simplified to:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2}{4\alpha^2\bar{\alpha}^2} \sin^2 \tilde{q}L} \quad (10.12)$$

In the limit  $V_0 \rightarrow \infty$  we have  $\bar{\alpha} \rightarrow 1$  and so:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(1 - \alpha^2)^2}{4\alpha^2} \sin^2 \tilde{q}L} \quad (10.13)$$

so we see that the probability for a massive Dirac fermion to tunnel through an infinite potential barrier is finite!

- 10.d** We see that in general the transmission probability of Dirac fermions are larger than that of Schrödinger particles. For large barriers the tunneling probability of Schrodinger particles is exponentially low, while for Dirac fermions we see a minimal transmission even for an infinitely strong barrier. The reason is that negative energy solutions to the Dirac equation are holes. This means that electrons are converted into holes when inside the barrier and are converted back on the other side. Another way of understanding this result is by noting that the solutions to  $\mathcal{H}\phi = \epsilon\phi$  are all traveling waves. Klein tunneling can then also be interpreted as a form of resonant tunneling, an effect known from optics.





## How do you print 20 nm structures using 193 nm light waves?

Join ASML as a Physics Engineer to find out.

We bring together the most creative minds to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips. Our machines image billions of structures in a few seconds. And we intend to be imaging even more billions, because our latest technology will create microchip features of just 20 nm, using light waves of 193 nm. That's like drawing an extremely fine line using an oversized marker. So we need talented Physicists who can design, model and manipulate at nanometer levels.

If you're up for it, you'll be part of a multidisciplinary team with plenty of freedom to experiment and learn new skills.

[www.asml.com/careers](http://www.asml.com/careers)

# ASML



/ASML



@ASMLcompany

For students who think ahead

